



ПРИРОДОМАТЕМАТИЧЕСКА ГИМНАЗИЯ "СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"

Математическото състезание „Вергил Крумов“

28.11.2009 година, Силистра

ХІІ клас

Време за работа: 120 минути

Регламент: Задачите от 1 до 5 се оценяват по 2 точки, задачи от 6 до 10 се оценяват с 3 точки, задачите от 11 до 14 с 4 точки и задача 15 с 9 точки. Ако посочите друг отговор - напишете го.

1. Ако $x^3 - y^3 = 117$, а $x - y = 3$, то xy е равно на :

- а) 30 б) 15 в) 10 г) не може да се определи

2. Изразете $\log_6 9$ чрез a , ако $6^a = 2$.

- а) $\frac{2}{1-2a}$ б) $2(1-a)$ в) $\frac{2-a}{1-a}$ г) никое от тях

3. За $n \geq 0$ редицата $\{a_n\}$ е дефинирана както следва:

$a_0 = 3$; $a_1 = 5$; $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Намерете a_{2009} .

- а) 5 б) 3 в) $\frac{3}{5}$ г) $\frac{5}{3}$

4. Кое от числата не е корен на уравнението $(x-1)^{x^2-5x+4} = 1$?

- а) 0 б) 1 в) 2 г) 4

5. Ако $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} = 30$, то x удовлетворява неравенството:

- а) $-5 < x < -4$ б) $-4 < x < 3$ в) $3 < x < 4$ г) $-8 < x < -7$

6. Множеството от стойности на функцията $f(x) = \frac{3x+2}{9x^2+12x+8}$ е :

- а) $[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}]$ б) $[0; +\infty)$ в) $(-\infty; +\infty)$ г) $(-\infty; 0]$

7. Три карти – карта 1; карта 2 и карта 3 са изтеглени от една колода. Една от картите е асо, една е поп и една е дама. Точно едно от следващите твърдения е вярно.

- I) Карта 2 не е дама;
II) Карта 3 е дама;
III) Карта 1 не е асо.

- A) Карта 1 е дама.
Б) Карта 1 е асо.
B) Карта 3 е поп.
Г) Карта 3 е асо.

В такъв случай:

8. Ако f е непрекъсната функция в интервала $[-4;4]$ и такава, че $f(-4) = 11$ и $f(4) = -1$, то:

а) $f(0) = 0$

б) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 8$

в) има поне едно $c \in [-4;4]$, за което $f(c) = 8$

г) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} f(x)$

9. Колко от функциите:

$f(x) = \sin x$ $f(x) = \cos x$ $f(x) = x^3$ имат свойството $f''(x) = -f(x)$

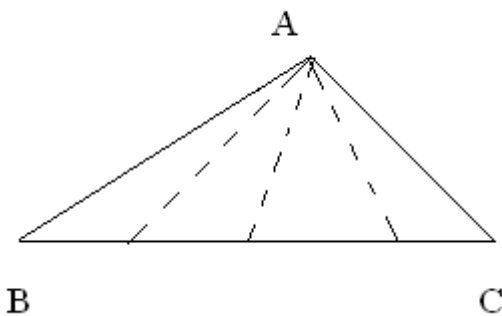
а) 0

б) 1

в) 2

г) 3

10. През върха A към страната BC на $\triangle ABC$ са прекарани n прави. Колко триъгълника има на чертежа?



а) $n + 1$

б) $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

в) $\frac{n^2 + 2n + 1}{2}$

г) $n^2 - 1$

11. За кои стойности на k графиката на функцията $y = x^3 + kx^2 + x + 2$ има две хоризонтални допирателни.

12. За кои стойности на реалния параметър a неравенството

$$-3 \leq \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 1 \text{ е в сила за всяко реално } x?$$

13. Графиката на функцията $f(x) = -x^2 + ax + 9$ за пресича абсцисната ос в точките A и B и ординатата ос в точката C . За кои стойности на реалния параметър a лицето на триъгълника ABC е равно на 27 ?

14. Триъгълникът ABC е вписан в окръжност с център O . Разстоянията от O до страните AC и BC са съответно равни на 1 и $\sqrt{2}$. Лицето на $\triangle ABH$, където H е ортоцентърът на триъгълника е равно на $\sqrt{6}$. Да се определи $\angle ABC$.

15. Да се реши неравенството:

$$x \cdot 3^{x+1} < x \cdot \frac{2x-8}{2x-1}$$