ПРИРОДОМАТЕМАТИЧЕСКА ГИМНАЗИЯ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

XVII математическо състезание „Вергил Крумов”

23.11.2013 година, Силистра

XII клас

Време за работа: 180 минути

Регламент: Задачите от 1 до 5 се оценяват по 2 точки, задачи от 6 до 10 се оценяват с 3 точки. Задачите от 11 до 14 се оценяват по 4 точки за посочване на верен отговор. Задача 15 се оценява с 9 точки за пълно решение. Ако посочите „друг отговор” – напишете го.

1 зад. Кое от изброените числа е по-голямо от **1?**

А) $(\sqrt{1{,}01})^{-\pi}$; Б) $\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^{\cos 100^\circ}$; В) $(0{,}5)^{\cos 100^\circ}$; Г) друг отговор.

2 зад. Да се реши уравнението $0{,}01.(10^{x-2})^5 = 2^x.5^x$

А) 3; Б) $3\frac{1}{3}$; В) 2 и 3 ; Г) друг отговор.

3 зад. Границата на редицата с общ член $a_n = \dfrac{5^n - 3}{5^{n+1} + 2}$ при $n \to \infty$ е:

А) $-\frac{3}{2}$; Б) $\frac{1}{5}$; В) 5 ; Г) друг отговор.

4 зад. Дефиниционното множество на функцията $f(x) = \log_{x-1}(x^2 + 3x)$ **е:**

А) $x \in (1;2) \cup (2;+\infty)$; Б) $x \in (-\infty;-3) \cup (0;+\infty)$; В) $x \in (1;+\infty)$; Г) друг отговор.

5 зад. Да се реши уравнението $\sin\left(\dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{-x}}{2}\right)^2 = \sin x$

А) $x = k\pi$; Б) няма решение; В) друг отговор; Г) $x = 0$.

6 зад. Да се реши неравенството $\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^{\log_4(x-5)} > 1$

А) $x \in (6;+\infty)$; Б) $x \in (5;6)$; В) $x \in (0;6)$; Г) друг отговор.

7 зад. Две от страните на триъгълник са 4 см. и 5 см., а ъглите срещу тях се отнасят както 1 : 2. Третата страна е равна на:

А) 4 см.; Б) $\frac{9}{4}$ см.; В) 4 и $\frac{9}{4}$ см. Г) друг отговор.

8 зад. Да се пресметне израза $\cos 32^\circ tg\, 29^\circ + \sin 32^\circ$

А) -1; Б) $\sqrt{3}$; В) 1; Г) друг отговор.

9 зад. Изразът $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ е равен на:

А) 4; Б) $2\sqrt{5}$; В) друг отговор ; Г) 1.

10 зад. Сумата $1+\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{\pi}{8}+\ ...$ на членовете на безкрайната геометрична прогресия е:

А) $4-2\sqrt{2}$; Б) $4+2\sqrt{2}$; В) $2\sqrt{2}-2$; Г) друг отговор.

(За задачи от 11 до 14 се изисква да поставите само верния отговор на задачата!)

11 зад. Кое е множеството от стойности на функцията $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-x^2}$ **?**

12 зад. Даден е ΔABC със страни $AB=4,\ BC=3,\ AC=\sqrt{5}$. Да се намери ъгълът, който сключват медианите AK и CL.

13 зад. Да се реши неравенството $\dfrac{(x-7)(x^2+5)}{\log_3(x-2)} \geq 0$

14 зад. В изпъкнал n-ъгълник ($n \geq 3$) са прекарани всички диагонали.Страните и диагоналите общо ще наричаме отсечки. Каква е вероятността произволно избрана отсечка да се окаже диагонал?

15 зад. ***(Изисква се пълно решение на задачата!)***

Функцията $f(x)$ е дефинирана по следното правило:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+m, & x<1 \\ mx^2+4mx+m^2+m-1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Да се намерят всички стойности на m, за които $f(x) \geq 0$ за всяко реално x.

XII клас

Отговори:

Зад.1	Зад.2	Зад.3	Зад.4	Зад.5	Зад.6	Зад.7	Зад.8	Зад.9	Зад.10
В	**А**	**Б**	**А**	**Г**	**Б**	**Б**	**В**	**Г**	**Б**

Зад.11	Зад.12	Зад.13	Зад.14
$\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$	$90°$	$x\in(2;3)\cup[7;+\infty)$	$\frac{n-3}{n-1}$

Забележка:

Ако в задача 11 и двете скоби са отворени се дават 3 т.

Ако в задача 13 всички скоби са отворени се дават 3 т.

Решение на Задача 15: / общо 9 точки /

Търсим тези числа m, за които $f(x)\geq 0$ и за $x<1$, и за $x\geq 1$, т.е търсим сечението за m в двата случая.

I. Нека $x\in(-\infty;1)$, $f(x)=x^2-4x+m\geq 0$ ще е изпълнено в случаите:

(1) $\left|\begin{array}{l} D\geq 0 \\ f(1)\geq 0 \\ -\frac{b}{2a}>1 \end{array}\right.$ или (2) $D<0$ **2 точки**

(1) $\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} m\leq 4 \\ m\geq 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow m\in[3;4]$, **(2)** $\Leftrightarrow m\in[4;+\infty)$.

Така за $x\in(-\infty;1)$ $m\in[3;+\infty)$. **2 точки**

II. Нека $x\in[1;+\infty)$. От първия случай е ясно,че $m>0$.

$f(x)=mx^2+4mx+m^2+m-1\geq 0$ ще е изпълнено в случаите:

(3) $\left|\begin{array}{l} D\geq 0 \\ f(1)\geq 0 \\ -\frac{b}{2a}<1 \\ m>0 \end{array}\right.$ или (4) $D<0$ **2 точки**

(3) $\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} m(3m-m^2+1)\geq 0 \\ m>0 \\ m^2+6m-1\geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m\in\left[\sqrt{10}-3;\ \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right]$

(4) $\Leftrightarrow m\in\left[\frac{3+\sqrt{13}}{2};+\infty\right)$. Така в този случай $m\in\left[\sqrt{10}-3;\ +\infty\right]$. **2 точки**

Решението на задачата дава сечението на интервалите $m\in[3;+\infty)$ и $m\in\left[\sqrt{10}-3;\ +\infty\right]$.

И тъй като $\sqrt{10}-3<3$, окончателно решението е $m\in[3;+\infty)$. **1 точка**