Математическо състезание „Віргил Крумов”

17.11.2012 година, Силистра

XII клас

Отговори:

Зад.1	Зад.2	Зад.3	Зад.4	Зад.5	Зад.6	Зад.7	Зад.8	Зад.9	Зад.10
А	**Г**	**В**	**Б**	**Г**	**В**	**А**	**В**	**Б**	**Б**

Зад.11	Зад.12	Зад.13	Зад.14
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{1-\cos^2 x}=\dfrac{1}{2}$	7 и 8	$a\geq 2$	$\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}$

Решение на Задача 15:

а)

I. случай: Нека $k=0$. Тогава уравнение $kx^2+3x+2k^2-3=0$ **(1) става линейно с корен $x=1$, което е цяло число. Следователно $k=0$ е решение на задачата. /1т/**

II. случай: Нека $k\neq 0 \Rightarrow$ (1) е квадратно и има реални корени когато $D\geq 0$, т.е. $-8k^3+12k+9\geq 0$ /1т/. Корените x_1 и x_2 са цели числа, а от формулите на Виет имаме

$x_1+x_2=-\dfrac{3}{k}$ **и** $x_1.x_2=\dfrac{2k^2-3}{k}=2k-\dfrac{3}{k}$ **, които са цели** $\Rightarrow$ $-\dfrac{3}{\kappa}$ **и** 2κ **са цели, което е възможно само ако** $k=\dfrac{p}{q}$ **- рационално число. Нека** $k=\dfrac{p}{q}$ **е несъкратима дроб. /1т/**

Тогава $-\dfrac{3}{k}=-\dfrac{3q}{p}$ **и е цяло** $\Leftrightarrow$ ***p* / 3, т.е.** $p=\pm1;\pm3$

и $2k=\dfrac{2p}{q}$**, което също е цяло** $\Leftrightarrow$ ***q* / 2, т. е.** $q=\pm1;\pm2$

И така, всички възможности са : $k=\dfrac{p}{q}=\pm1;\pm3;\pm\dfrac{1}{2};\pm\dfrac{3}{2}$ **/1т/**

Проверяваме за кои от тях е изпълнено и условието $D\geq 0$ **и *D* да е точен квадрат. Установяваме, че възможните решения на задачата са числата** $k=0;\ -\dfrac{1}{2};\ \dfrac{3}{2}$**. След директна проверка установяваме, че корените наистина са цели числа , с което задачата е решена. /1т/**

б) Нека OE и OD са перпендикуляри от т. O съответно до AC и BC. Тъй като ΔABC **и** ΔAOC **имат равни основи, а лицата им се отнасят както 1:3, следва че** $OE = \frac{1}{3}BC$ **.**

Аналогично намираме, че $OD = \frac{1}{3}AC$ **. /1т/**

Тогава от теоремата на Питагор за ΔAOE **и** ΔBOD **имаме** $AO^2 = \frac{4}{9}AC^2 + \frac{1}{9}BC^2$**,**

$BO^2 = \frac{1}{9}AC^2 + \frac{4}{9}BC^2$**, откъдето** $AC^2 + BC^2 = \frac{9}{5}(AO^2 + BO^2)$**. /1т/**

Освен това $OC^2 = OD^2 + OE^2 = \frac{1}{9}(AC^2 + BC^2) = \frac{1}{5}(AO^2 + OB^2) = \frac{1}{5}.25 = 5$ **, откъдето** $OC = \sqrt{5}$ **/2т/**