



ПРИРОДОМАТЕМАТИЧЕСКА ГИМНАЗИЯ "СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"

XVI математическо състезание „Вергил Крумов”

17.11.2012 година, Силистра

XII клас

Време за работа: 180 минути

Регламент: Задачите от 1 до 5 се оценяват по 2 точки, задачи от 6 до 10 се оценяват с 3 точки. Задачите от 11 до 14 се оценяват по 4 точки за посочване на верен отговор. Задача 15 се оценява с 9 точки за пълно решение. Ако посочите „друг отговор” – напишете го.

1 зад. На колко е равен изразът $36^{\log_6 5} + 10^{1-\lg 2} - 3^{\log_9 36}$?

- А) 24 Б) 14 В) 9 Г) друг отговор

2 зад. Да се реши неравенството $\sqrt{3} \cdot 3^{x^2+0,5} < 3^{2(x+2)}$

- А) друг отговор Б) $x \in (-\infty; 3)$ В) $x \in (-1; +\infty)$ Г) $x \in (-1; 3)$

3 зад. Правоъгълен триъгълник е вписан в окръжност. Допирателната във върха на правия ъгъл сключва с катетите ъгли, които се отнасят както 1 : 2. На колко е равен най-малкият ъгъл на триъгълника?

- А) 60° Б) 15° В) 30° Г) друг отговор

4 зад. Колко решения има уравнението $\frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4} = \frac{3x - 4}{x - 2} + x$

- А) 2 Б) 0 В) 1 Г) друг отговор

5 зад. Вероятност на случайно събитие не може да бъде числото:

- А) $\log_{3^{-2}} \frac{1}{3}$ Б) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4}$ В) друг отговор Г) $(\sqrt[3]{3})^2$

6 зад. Да се намери дефиниционното множество на функцията $f(x) = \log_x \frac{4x+5}{6-5x}$

- А) $x \in (-\infty; \frac{6}{5})$ Б) $x \in (-\frac{5}{4}; 1)$ В) $x \in (0; 1) \cup (1; \frac{6}{5})$ Г) друг отговор

7 зад. Да се реши уравнението $|x^2 - x - 2| + |6 + x - x^2| = 4$

- А) $x \in [-2; -1] \cup [2; 3]$ Б) -2; -1; 2 и 3 В) $x \in [-2; 3]$ Г) друг отговор

8 зад. Да се реши уравнението $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{7-x} = 2$

- А) -1 Б) 7 В) -1 и 7 Г) друг отговор

9 зад. В $\triangle ABC$ ъглите A и B са остри, а AA_1 и BB_1 са височини. На колко е равен $\angle ACB$, ако $2A_1B_1 = AB$?

А) 60° Б) 60° или 120° В) 120° Г) друг отговор

10 зад. Да се реши уравнението: $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}} = 6$

А) 36 Б) 30 В) 6 Г) друг отговор

(За задачи от 11 до 14 се изисква да поставите само верния отговор на задачата!)

11 зад. Кое от числата $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{1 - \cos^2 x}$; $\cos \frac{5\pi}{4}$ и $2^{\sqrt{\log_2 3}} - 3^{\sqrt{\log_3 2}}$ е най-голямо?

12 зад. Да се намерят страните на $\triangle ABC$, ако $AB = 5$, $\angle BAC = 60^\circ$, $R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$, където R е радиусът на описаната окръжност.

13 зад. За кои положителни стойности на параметъра a уравнението $\sqrt{a-x} + \sqrt{a+x} = x$ има корен $x = 2\sqrt{a-1}$?

14 зад. Да се пресметне $\operatorname{tg} \alpha$, ако $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}$ и $\alpha \in [0; \frac{\pi}{4}]$.

15 зад. (Изисква се пълно решение на задачата!)

а) За кои стойности на параметъра k , уравнението $kx^2 + 3x + 2k^2 - 3 = 0$ има за корени само цели числа?

б) В правоъгълен $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^\circ$, е взета точка O , така че триъгълниците OAB , OBC и OAC са равнолицеви. Да се намери дължината на OC , ако $OA^2 + OB^2 = 25$.