ПРИРОДОМАТЕМАТИЧЕСКА ГИМНАЗИЯ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

XVII математическо състезание „Вергил Крумов”

23.11.2013 година, Силистра

XI клас

Време за работа: 180 минути

Регламент: Задачите от 1 до 5 се оценяват по 2 точки, задачи от 6 до 10 се оценяват с 3 точки. Задачите от 11 до 14 се оценяват по 4 точки за посочване на верен отговор. Задача 15 се оценява с 9 точки за пълно решение. Ако посочите „друг отговор” – напишете го.

1 зад. Кое от изброените числа е по-голямо от **1?**

А) $(\sqrt{1{,}01})^{-\pi}$ **;** Б) $\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^{\cos 100^\circ}$ **;** В) $(0{,}5)^{\cos 100^\circ}$ **;** Г) друг отговор.

2 зад. Да се реши уравнението $0{,}01.(10^{x-2})^5 = 2^x.5^x$

А) 3; Б) $3\dfrac{1}{3}$ **;** В) 2 и 3; Г) друг отговор.

3 зад. Ако за аритметична прогресия $\mathbf{a_3 + a_9 = 8}$, то $\mathbf{S_{11}}$ е равно на:

А) 44; Б) 80; В) 88; Г) не може да се определи.

4 зад. Дефиниционното множество на функцията $f(x) = \log_{x-1}(x^2 + 3x)$ е:

А) $x \in (1;2) \cup (2;+\infty)$**;** Б**)** $x \in (-\infty;-3) \cup (0;+\infty)$**;** В) $x \in (1;+\infty)$**;** Г) друг отговор.

5 зад. Да се реши уравнението $\sin\left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{-x}}{2}\right)^2 = \sin x$

А) $x = k\pi$ **;** Б) няма решение; В) $x = 0$ **;** Г) друг отговор**.**

6 зад. Даден е ΔABC , BC = 5 см., $\angle$ACB= 60° и радиус на описаната окръжност R = $\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$. Радиусът на вписаната окръжност е равен на:

А) 10 см. ; Б) $\sqrt{3}$ В) 4см. Г) друг отговор.

7 зад. Две от страните на триъгълник са 4 см. и 5 см., а ъглите срещу тях се отнасят както 1 : 2. Третата страна е равна на:

А) 4 см.; Б) $\dfrac{9}{4}$ см.; В) 4 и $\dfrac{9}{4}$ см.; Г) друг отговор.

8 зад. Да се пресметне израза $\cos 32^\circ tg\, 29^\circ + \sin 32^\circ$

А) -1; Б) $\sqrt{3}$; В) 4; Г) друг отговор.

9 зад. Изразът $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ е равен на:

А) 4; Б) $2\sqrt{5}$ **;** В) 1**;** Г) друг отговор.

10 зад. Сумата $1+\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{\pi}{8}+\ \ldots$ на членовете на безкрайната геометрична прогресия е:

А) $4-2\sqrt{2}$ **;** Б) $4+2\sqrt{2}$**;** В) $2\sqrt{2}-2$**;** **Г)** друг отговор.

(За задачи от 11 до 14 се изисква да поставите само верния отговор на задачата!)

11 зад. Запишете решенията на неравенството $49^{\frac{1}{x}} \leq \sqrt{7^x}$.

12 зад. Даден е ΔABC със страни $AB=4,\quad BC=3,\quad AC=\sqrt{5}$**.** *Да се намери ъгълът, който сключват медианите* AK *и* CL.

13 зад. За кои стойности на реалния параметър **а** уравнението $\left(\frac{1}{7}\right)^x = \frac{3+a}{5-a}$ има отрицателни решения.

14 зад. В изпъкнал n-ъгълник ($n \geq 3$) са прекарани всички диагонали.Страните и диагоналите общо ще наричаме отсечки. Каква е вероятността произволно избрана отсечка да се окаже диагонал?

15 зад. ***(Изисква се пълно решение на задачата!)***

Функцията $f(x)$ е дефинирана по следното правило:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+m, & x<1 \\ mx^2+4mx+m^2+m-1, & x\geq 1 \end{cases}$$

Да се намерят всички стойности на m, за които $f(x)\geq 0$ за всяко реално x.

XI клас

Отговори:

Зад.1	Зад.2	Зад.3	Зад.4	Зад.5	Зад.6	Зад.7	Зад.8	Зад.9	Зад.10
В	**А**	**А**	**А**	**В**	**Б**	**Б**	**Г)1**	**В**	**Б**

Зад.11	Зад.12	Зад.13	Зад.14
$[-2;0)\cup[2;+\infty)$	90°	**(1; 5)**	$\dfrac{n-3}{n-1}$

Решение на Задача 15: / общо 9 точки /

Търсим тези числа m**, за които** $f(x)\geq 0$ и за $x<1$**,** и за $x\geq 1$**,** т.е търсим сечението за m в двата случая.

I. Нека $x\in(-\infty;1)$**,** $f(x)=x^2-4x+m\geq 0$ ще е изпълнено в случаите:

(1) $\left|\begin{array}{l} D\geq 0 \\ f(1)\geq 0 \\ -\dfrac{b}{2a}>1 \end{array}\right.$ или (2) $D<0$ **2 точки**

(1) $\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} m\leq 4 \\ m\geq 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow m\in[3;4]$**,** (2) $\Leftrightarrow m\in[4;+\infty)$**.**

Така за $x\in(-\infty;1)$ $m\in[3;+\infty)$**.** **2 точки**

II. Нека $x\in[1;+\infty)$**.** От първия случай е ясно,че $m>0$**.**

$f(x)=mx^2+4mx+m^2+m-1\geq 0$ ще е изпълнено в случаите:

(3) $\left|\begin{array}{l} D\geq 0 \\ f(1)\geq 0 \\ -\dfrac{b}{2a}<1 \\ m>0 \end{array}\right.$ или (4) $D<0$ **2 точки**

(3) $\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} m(3m-m^2+1)\geq 0 \\ m>0 \\ m^2+6m-1\geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m\in\left[\sqrt{10}-3;\ \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right]$

(4) $\Leftrightarrow m\in\left[\dfrac{3+\sqrt{13}}{2};+\infty\right)$**.** Така в този случай $m\in\left[\sqrt{10}-3;\ +\infty\right]$**.** **2 точки**

Решението на задачата дава сечението на интервалите $m\in[3;+\infty)$ и $m\in\left[\sqrt{10}-3;\ +\infty\right]$.
И тъй като $\sqrt{10}-3<3$**,** окончателно решението е $m\in[3;+\infty)$**.** **1 точка**