ПРИРОДОМАТЕМАТИЧЕСКА ГИМНАЗИЯ

„СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

XVII математическо състезание „Вергил Крумов”

23.11.2013 година, Силистра

X клас

Време за работа: 180 минути

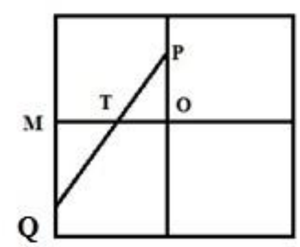
<u>**Регламент:**</u> **Задачите от 1 до 5 се оценяват по 2 точки, задачи от 6 до 10 се оценяват с 3 точки. Задачите от 11 до 14 се оценяват по 4 точки за посочване на верен отговор. Задача 15 се оценява с 9 точки за пълно решение. Ако посочите “друг отговор”– напишете го.**

1 зад. Ако $\mathbf{x^3 - y^3 = 117}$ и $\mathbf{x - y = 3}$, тогава стойността на $\mathbf{xy}$ е:

А) 30; Б) 15; В) 10; Г) не може да се определи.

2 зад. Големият квадрат на чертежа има страна 14 см, а малките квадрати са получени при съединяване на средите на срещуположните му страни. Ако PO=5 см, TO=3 см и MQ=y, то стойността на y е:

А) 5; Б) 6; В) $6\frac{2}{3}$; Г) $6\frac{5}{8}$;



3 зад. Дадена е функцията $f(x)=ax^2 + 7x + \frac{49}{4a}$, $a\neq0$. За графиката на $\mathbf{f}(x)$ винаги е вярно:

А) пресича абцисната ос; Б) допира се до абцисната ос

В) допира се до ординатната ос; Г) има минимум.

4 зад. Ако $\boldsymbol{\alpha}$ е остър ъгъл и $\mathbf{cotg}\ \boldsymbol{\alpha} = \frac{3}{4}$, то стойността на израза $\frac{3tg\,\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$ е :

А) $\frac{4}{5}$; Б) - 20 ; В) $-\frac{4}{5}$; Г) друг отговор.

5 зад. Ако $\mathbf{x=45^o}$ е решение на уравнението: $\boldsymbol{sin^2 x + a\ \sin x\ \cos x - 3\cos^2 x = 0}$, то:

А) $a = 2$; Б) $a = \frac{1}{2}$; В) $a = 0$; Г) друг отговор.

6 зад. Корените на уравнението $\sqrt{\mathbf{4x - x^2 + 1}} = \mathbf{-2x}$ са:

А) 1;   Б) $-\frac{1}{5}$;   В) 1 и $-\frac{1}{5}$;   Г) друг отговор.

7 зад. Ако $\mathbf{16^x + 16^{-x} = 47}$, то $\mathbf{4^x + 4^{-x}}$ е равно на:

А) 7;   Б) 49;   В) $\sqrt{47}$;   Г) друг отговор.

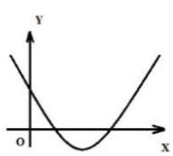
8 зад. Ако $\sin\alpha = \frac{1}{5}$, то стойността на израза $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha)\operatorname{cotg}\alpha$ е:

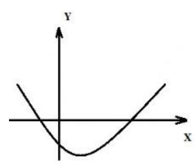
А) 5;   Б) 25;   В) $\sqrt{24}$;   Г) друг отговор.

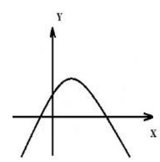
9 зад. Уравнението $ax^2 - x + a = 0$ няма реални корени , ако:

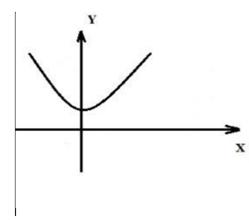
А) $\in (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$;   Б) $a \in (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}) \setminus \{0\}$;   В) $a \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$;   Г) $a = 0$.

10 зад. Ако $f(x) = 9x^2 - 6x - 5$, то графиката ѝ може да е:

А) 

Б) 

В) 

Г) 

(За задачи от 11 до 14 се изисква да поставите само верния отговор на задачата)

11 зад. За кои стойности на параметъра a уравнението $|\mathbf{x^2 - 6x + 5}| = a$ има два различни реални корена?

12 зад. Решенията на неравенството $\frac{4x^3 - x^4 - 3x^2}{2x^2 - 5x - 3} \leq 0$ са:…………..

13 зад. Намерете лицето на триъгълник с върхове пресечните точки на графиките на функциите:

$f_1(x) = \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$; $f_2(x) = -5x + 8$; $f_3(x) = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{2}$

14 зад. В шахматен турнир между 7 приятели били разпределени общо 59 точки. Всеки е играл с всеки от останалите точно 1 среща. При победа победителят получавал по 3 точки, а победеният – 0 точки. При равен резултат (реми) и двамата играчи получавали по 1 точка. Колко от срещите са завършили с реми и ако победителят е бил само един, какъв е най-малкият брой точки, с които той е завършил турнира?

15 зад. ***(Изисква се пълно решение на задачата)***

В равнобедрен трапец ABCD основите AB и CD се отнасят тъй както 5:1. Петата на перпендикуляра AM към бедрото BC (M ∈ BC) е вътрешна точка за BC. Ако AM=BC, пресметнете синуса на ъгъла при по-голямата основа на трапеца.

X клас

Отговори:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	13
В	**В**	**Б**	**Б**	**А**	**Б**	**А**	**Б**	**В**	**Б**	**9,5**

11. зад. $a \in \{0\} \cup (4; +\infty)$ **4 т.** = **1т**. за $\{0\}$ + **3т.**

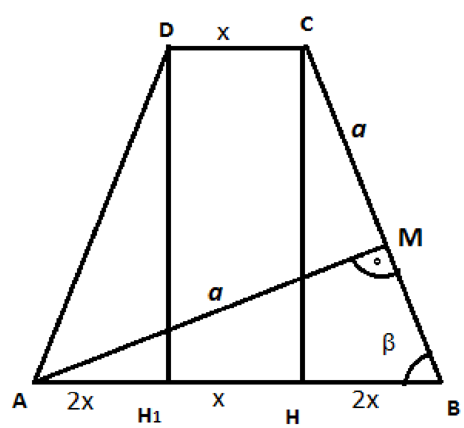
12. зад. $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \{0\} \cup [1; +\infty) \backslash \{3\}$ **4 т.** = **1т.** + **1т.** + **1т.** +**1т.**

14 зад. Отг. 4 и 10 точки **4 т.** = **2т.** + **2т.**

Срещите са $\frac{7.6}{2} = 21$; 21.2=42 т. ако всички срещи са реми.59 – 42 = 17 т. за допълване => 17 срещи са завършили с победител => 21 – 17 = 4 срещи са завършили реми. 59 : 7 = 8(ост.3) => от принципа на Дирихме минималния брой точки може да е 9, но тогава още 1 ще е с 9 точки и победителят няма да е 1 => Точките на победителя са поне 10. Следния пример показва, че това е възможно.

Номер на състезателя	I	II	III	IV	V	VI	VII	Общо
Победи	3	3	3	2	2	2	2	17
Реми	1	0	0	2	2	2	1	4
Загуби	2	3	3	2	2	2	3	17
Точки	10	9	9	8	8	8	7	59

15 зад. Решение:



AB:CD=5:1 => AB=5x; CD=x. Нека *CH⊥AB, H∈AB.*

От $\Delta\ ABM\ (\measuredangle M = 90°, \measuredangle B = \beta)\ => \sin\beta = \frac{AM}{AB}$

От Δ BCH $(\measuredangle H = 90°)\ => \sin\beta = \frac{CH}{CB} => \frac{AM}{AB} = \frac{CH}{CB}$

$=> AM.CB = AB.CH.$ **3т.**

Нека *AM=CB=a => a^2=AB.CH* ***(1)***

Ако *$DH_1 \perp AB$, $H_1 \in AB$ => H_1HCD* – правоъгълник.

=> *H_1H=CD=x, BH=AH_1=2x* $(\Delta\ AH_1D \sim \Delta BHC)$ **1т.**

От ПТ за ΔBCH => *CH*=$\sqrt{a^2 - 4x^2}$ ***(2)*** **1т.**

От***(1) и (2)*** => $a^2 = 5x\sqrt{a^2 - 4x^2} <=> a^4 = 25x^2(a^2 - 4x^2) <=> 100\,x^4 - 25a^2x^2 + a^4 = 0$

$=> x_1 = \frac{a}{\sqrt{5}}, x_2 = \frac{a}{2\sqrt{5}} => h_1 = \frac{a}{\sqrt{5}}, h_2 = \frac{a}{2\sqrt{5}}; \sin\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin\beta_2 = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}; \cos\beta_1 = \frac{2\sqrt{5}}{5}; \cos\beta_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$=> BM_1 = 5x_1\cos\beta_1 = 5\frac{a}{\sqrt{5}}\frac{2}{\sqrt{5}} = 2a > a => M$ външна за ВС.

$BM_2 = 5x_2\cos\beta_2 = 5\frac{a}{2\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{a}{2} < a => M$ вътрешна за BC **3т.**

Отговор: $\sin\alpha = \sin\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ **1т.**