XVI математическо състезание „Вергил Крумов”

17.11.2012 година, Силистра

X клас

Отговори:

Зад.1	Зад.2	Зад.3	Зад.4	Зад.5	Зад.6	Зад.7	Зад.8	Зад.9	Зад.10
Б	**Г**	**В**	**А**	**Б**	**А**	**В**	**Б**	**Г**	**В**

Зад.11	Зад.12	Зад.13	Зад.14
S=11см^2	$b=-2$ $\alpha=30^\circ$	**2**	$(2;1)$ $(4;2)$

<u>Решение на Задача 15:</u>

а) $(k^2-k+2)x^2-2(2k^2-2k+5)x+k^2-k+2=0$

Уравнението има реални корени, ако $D\geq 0$

$D=4k^2-4k-9=4k^2-4k+1+8=(2k-1)^2+8\geq 0$ за всяко k **/1т/**

Корените са положителни, ако $x_1+x_2>0$ и $x_1.x_2>0$

$x_1+x_2=\dfrac{2k^2-2k+5}{k^2-k+5}>0$ за всяко k **/1т/**

$x_1.x_2=1>0$

$A^2=\dfrac{x_1+x_2-2\sqrt{x_1x_2}}{x_1.x_2}=\dfrac{1}{k^2-k+2}$ **/1т/**

$A=\sqrt{\dfrac{1}{k^2-k+2}}$ **/1т/**

б)

<u>I начин:</u>

$\sqrt{x^2-2ax+a}=\sqrt{-8x-8}\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}x^2-2(a-4)x+a+8=0\\ x\leq -1\end{array}\right.$ **/1т/**

Даденото уравнение има решение, ако уравнението $x^2-2(a-4)x+a+8=0$ има поне един корен удовлетворяващ неравенството $x\leq -1$

$D=a^2-9a+8$

$D\geq 0\Leftrightarrow a\in(-\infty;1]\cup[8;+\infty)$ **/1т/**

<u>1 случай:</u> Двата корена да удовлетворяват условието $x \le -1$

$x_1 \le -1$ и $x_2 \le -1$ т. е. $x_1 \le x_2 \le -1$

Чрез разположение на корените $\begin{cases} D \ge 0 \\ f(-1) = (-1)^2 - 2(a-4)(-1) + a + 8 \ge 0 \\ a - 4 < -1 \end{cases}$

решение: $a \in \left[-\frac{1}{3};1\right]$ **/1т/**

<u>2 случай:</u> Само един от корените удовлетворява условието $x \le -1$;

т. е. $x_1 \le -1 \le x_2$ **/1т/**

$f(-1) = (-1)^2 - 2(a-4)(-1) + a + 8 = 1 + 3a \le 0$ т. е. $a \le -\frac{1}{3}$; $a \in \left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)$ **/1т/**

Отговор: $a \in (-\infty;1]$ **/1т/**

<u>II начин:</u>

Задачата може да се реши чрез директно изразяване на x_1 и x_2

При $a \in (-\infty;1] \cup [8;+\infty)$ **/1т/**

$x_1 = a - 4 + \sqrt{a^2 - 9a + 8}$ и $x_2 = a - 4 - \sqrt{a^2 - 9a + 8}$

$x_1 \le -1$

$a - 4 + \sqrt{a^2 - 9a + 8} \le -1$

$\sqrt{a^2 - 9a + 8} \le 3 - a \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 9a + 8 \ge 0 \\ 3 - a \ge 0 \\ a^2 - 9a + 8 \le 9 - 6a + a^2 \end{cases}$ **/1т/**

решение: $a \in \left[-\frac{1}{3};1\right]$ (А) **/1т/**

$x_2 \le -1$

$a - 4 - \sqrt{a^2 - 9a + 8} \le -1$

$\sqrt{a^2 - 9a + 8} \ge a - 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 9a + 8 \ge 0 \\ a - 3 \ge 0 \\ a^2 - 9a + 8 \ge a^2 - 6a + 9 \end{cases}$ **/1т/** или $\begin{cases} a^2 - 9a + 8 \ge 0 \\ a - 3 \le 0 \end{cases}$ **/1т/**

няма решение

решение: $a \in [-\infty;1]$ (Б) **/1т/**

Поне един от корените x_1 и x_2 изпълнява условието $x \le -1$,

Ако $a \in \left[-\frac{1}{3};1\right] \cup (-\infty;1] = (-\infty;1]$

Отговор: $a \in (-\infty;1]$